Exemplo 14.1

Um veículo espacial de 200 kg é observado em $t = 0$ ao passar pela origem de um sistema de referência newtoniano $Oxyz$ com velocidade $\mathbf{v}_0 = (150 \text{ m/s})\mathbf{i}$ em relação ao sistema. Como resultado da detonação de cargas explosivas, o veículo se separa em três partes — A, B e C, de massas de 100 kg, 60 kg e 40 kg, respectivamente. Sabendo que em $t = 2{,}5$ s as posições das partes A e B observadas são $A(555, -180, 240)$ e $B(255, 0, -120)$, onde as coordenadas são expressas em metros, determine a posição da parte C nesse instante.

Como não há força externa, o centro de massa G do sistema se move com velocidade constante $\mathbf{v}_0 = (150 \text{ m/s})\mathbf{i}$. Em $t = 2{,}5$ s, sua posição é

$$\bar{\mathbf{r}} = \mathbf{v}_0 t = (150 \text{ m/s})\mathbf{i}(2{,}5 \text{ s}) = (375 \text{ m})\mathbf{i}$$

Recordando a Eq. (14.12), escrevemos

$$m\bar{\mathbf{r}} = m_A\mathbf{r}_A + m_B\mathbf{r}_B + m_C\mathbf{r}_C$$

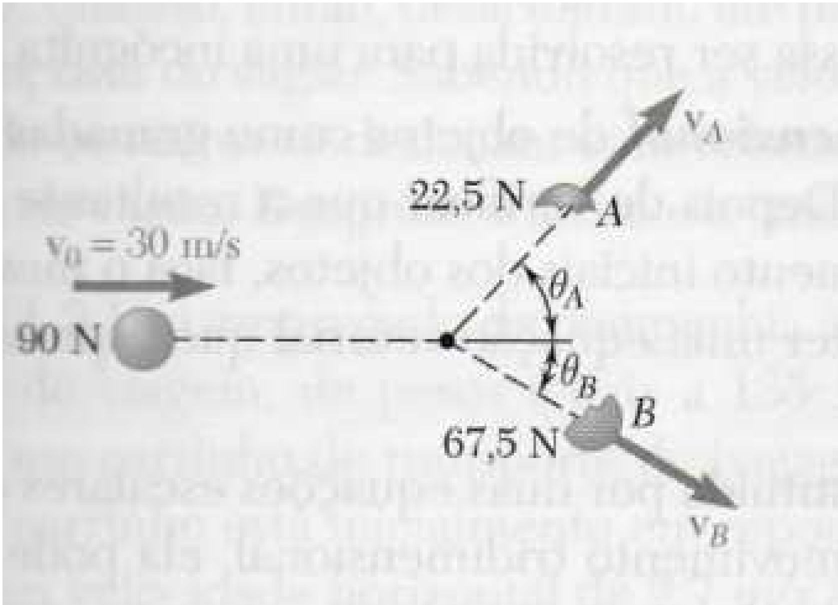
$$(200 \text{ kg})(375 \text{ m})\mathbf{i} = (100 \text{ kg})[(555 \text{ m})\mathbf{i} - (180 \text{ m})\mathbf{j} + (240 \text{ m})\mathbf{k}]$$

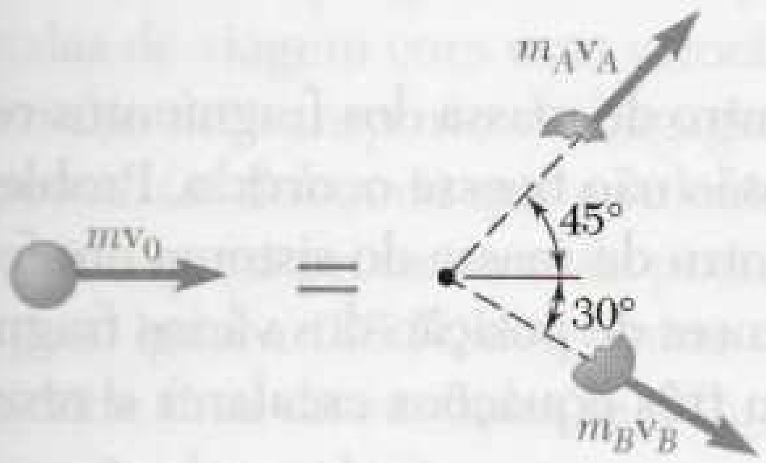
$$+ (60 \text{ kg})[(255 \text{ m})\mathbf{i} - (120 \text{ m})\mathbf{k}] + (40 \text{ kg})\mathbf{r}_C$$

$$\mathbf{r}_C = (105 \text{ m})\mathbf{i} + (450 \text{ m})\mathbf{j} - (420 \text{ m})\mathbf{k} \quad ◀$$

Exemplo 14.2

Um projétil de 90 N se move com uma velocidade de 30 m/s quando explode em dois fragmentos, A e B, que pesam 22,5 N e 67,5 N, respectivamente. Sabendo que imediatamente após a explosão os fragmentos A e B se movem em direções definidas respectivamente por $\theta_A = 45°$ e $\theta_B = 30°$, determine a velocidade de cada fragmento.





SOLUÇÃO

Como não há forças externas, a quantidade de movimento linear do sistema se conserva, e escrevemos

$$m_A\mathbf{v}_A + m_B\mathbf{v}_B = m\mathbf{v}_0$$

$$(22{,}5/g)\mathbf{v}_A + (67{,}5/g)\mathbf{v}_B = (90/g)\mathbf{v}_0$$

$\xrightarrow{+}$ componentes em x: $\quad 22{,}5v_A \cos 45° + 67{,}5v_B \cos 30° = 90(30)$

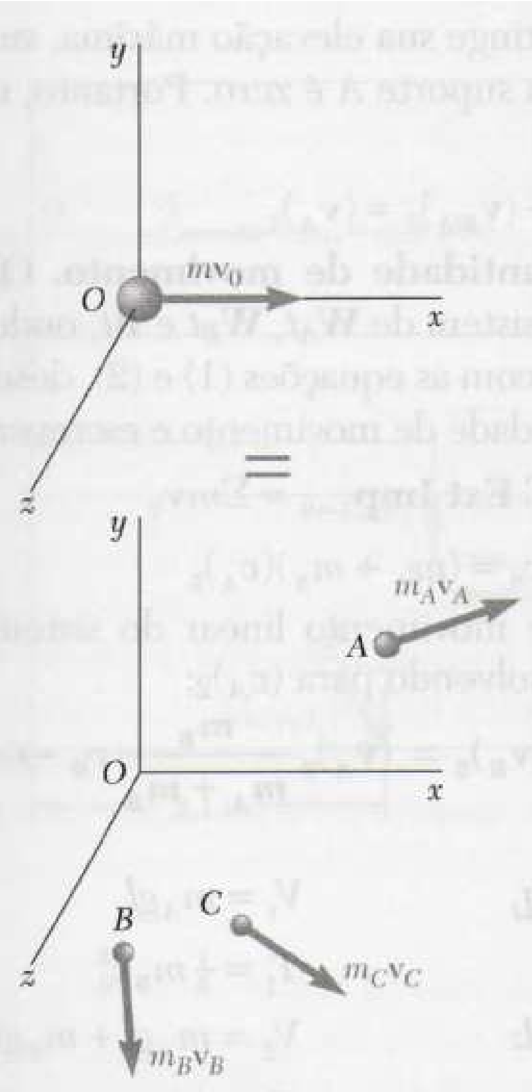
$+\uparrow$ componentes em y: $\quad 22{,}5v_A \operatorname{sen} 45° - 67{,}5v_B \operatorname{sen} 30° = 0$

Resolvendo simultaneamente as duas equações para v_A e v_B, temos

$$v_A = 62{,}1 \text{ m/s} \qquad v_B = 29{,}28 \text{ m/s}$$

$$\mathbf{v_A} = \mathbf{62{,}1\ m/s} \measuredangle \mathbf{45°} \qquad \mathbf{v_B} = \mathbf{29{,}28\ m/s} \searrow \mathbf{30°} \quad ◀$$

Para o veículo espacial de 200 kg considerado no Problema Resolvido 14.1, sabe-se que em $t = 2{,}5$ s, a velocidade da parte A é $\mathbf{v}_A = (270\ \text{m/s})\mathbf{i} - (120\ \text{m/s})\mathbf{j} + (160\ \text{m/s})\mathbf{k}$ e a velocidade da parte B é paralela ao plano xz. Determine a velocidade da parte C.



SOLUÇÃO

Como não há força externa, a quantidade de movimento inicial $m\mathbf{v}_0$ é eqüipolente ao sistema das quantidades finais de movimento. Igualando primeiramente as somas dos vetores em ambas as partes da ilustração adjacente e, em seguida, as somas de seus momentos em relação a O, escrevemos

$$\mathbf{L}_1 = \mathbf{L}_2: \qquad m\mathbf{v}_0 = m_A\mathbf{v}_A + m_B\mathbf{v}_B + m_C\mathbf{v}_C \tag{1}$$

$$(\mathbf{H}_O)_1 - (\mathbf{H}_O)_2: \qquad 0 = \mathbf{r}_A \times m_A\mathbf{v}_A + \mathbf{r}_B \times m_B\mathbf{v}_B + \mathbf{r}_C \times m_C\mathbf{v}_C \tag{2}$$

Recordando do Problema Resolvido 14.1 que $\mathbf{v}_0 = (150 \text{ m/s})\mathbf{i}$,

$$m_A = 100 \text{ kg} \qquad m_B = 60 \text{ kg} \qquad m_C = 40 \text{ kg}$$

$$\mathbf{r}_A = (555 \text{ m})\mathbf{i} - (180\text{m})\mathbf{j} + (240 \text{ m})\mathbf{k}$$

$$\mathbf{r}_B = (255 \text{ m})\mathbf{i} - (120 \text{ m})\mathbf{k}$$

$$\mathbf{r}_C = (105 \text{ m})\mathbf{i} + (450 \text{ m})\mathbf{j} - (420 \text{ m})\mathbf{k}$$

e usando a informação dada no enunciado deste problema, reescrevemos as Eqs. (1) e (2) como se segue:

$$200(150\mathbf{i}) = 100(270\mathbf{i} - 120\mathbf{j} + 160\mathbf{k}) + 60[(v_B)_x\mathbf{i} + (v_B)_z\mathbf{k}] + 40[(v_C)_x\mathbf{i} + (v_C)_y\mathbf{j} + (v_C)_z\mathbf{k}] \tag{1'}$$

$$0 = 100\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 555 & -180 & 240 \\ 270 & -120 & 160 \end{vmatrix} + 60\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 255 & 0 & -120 \\ (v_B)_x & 0 & (v_B)_z \end{vmatrix} + 40\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 105 & 450 & -420 \\ (v_C)_x & (v_C)_y & (v_C)_z \end{vmatrix} \tag{2'}$$

Igualando a zero o coeficiente de **j** em (1′) e os coeficientes de **i** e **k** em (2′), obtemos, após simplificações, as três equações escalares

$$(v_C)_y - 300 = 0$$

$$450(v_C)_z + 420(v_C)_y = 0$$

$$105(v_C)_y - 450(v_C)_x - 45.000 = 0$$

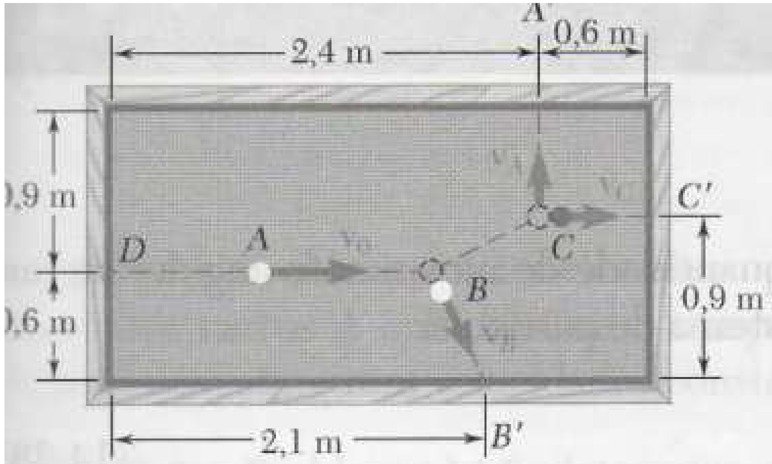
que resultam, respectivamente, em

$$(v_C)_y = 300 \qquad (v_C)_z = -280 \qquad (v_C)_x = -30$$

A velocidade da parte C é, portanto,

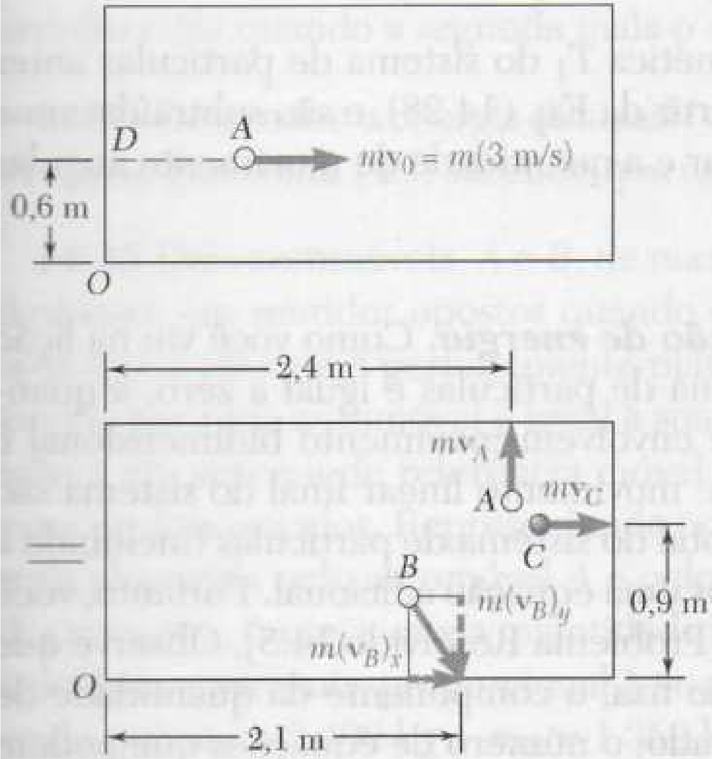
$$\mathbf{v}_C = -(30\ \mathrm{m/s})\mathbf{i} + (300\ \mathrm{m/s})\mathbf{j} - (280\ \mathrm{m/s})\mathbf{k} \quad \blacktriangleleft$$

Exemplo 14.5



Em um jogo de bilhar, foi dada à bola A uma velocidade inicial $\mathbf{v}_0$ de intensidade $v_0 = 3$ m/s ao longo da linha DA paralela ao eixo da mesa. Ela atinge a bola B e em seguida a bola C, que estavam ambas em repouso. Sabendo que A e C atingem os lados da mesa perpendicularmente nos pontos A' e C', respectivamente; que B alcança o lado obliquamente em B' e considerando superfícies sem atrito e impactos perfeitamente elásticos, determine as velocidades $\mathbf{v}_A$, $\mathbf{v}_B$ e $\mathbf{v}_C$ com que as bolas atingem os lados da mesa. (*Observação*. Neste e em vários dos problemas que se seguem, assume-se que as bolas de bilhar são partículas que se movem livremente em um plano horizontal em vez das esferas que rolam e deslizam que elas realmente são.)

SOLUÇÃO



Conservação da quantidade de movimento. Como não há força externa, a quantidade de movimento inicial $m\mathbf{v}_0$ é eqüipolente ao sistema das quantidades de movimento após as duas colisões (e antes que qualquer uma das bolas atinja o lado da mesa). Referindo-nos ao esboço adjacente, escrevemos

$\xrightarrow{+}$ componentes em x: $$m(3 \text{ m/s}) = m(v_B)_x + mv_C \quad (1)$$

$+\uparrow$ componentes em y: $$0 = mv_A - m(v_B)_y \quad (2)$$

$+\circlearrowleft$ momentos em relação a O: $$-(0{,}6 \text{ m})m(3 \text{ m/s}) = (2{,}4 \text{ m})mv_A - (2{,}1 \text{ m})m(v_B)_y - (0{,}9 \text{ m})mv_C \quad (3)$$

Resolvendo as três equações para v_A, $(v_B)_x$ e $(v_B)_y$ em termos de v_C,

$$v_A = (v_B)_y = 3v_C - 6 \qquad (v_B)_x = 3 - v_C \quad (4)$$

Conservação de energia. Como as superfícies são sem atrito e os impactos são perfeitamente elásticos, a energia cinética inicial $\frac{1}{2} mv_0^2$ é igual à energia cinética final do sistema:

$$\tfrac{1}{2} mv_0^2 = \tfrac{1}{2} m_A v_A^2 + \tfrac{1}{2} m_B v_B^2 + \tfrac{1}{2} m_C v_C^2$$

$$v_A^2 + (v_B)_x^2 + (v_B)_y^2 + v_C^2 = (3\text{ m/s})^2 \qquad (5)$$

Substituindo as expressões de v_A, $(v_B)_x$ e $(v_B)_y$ de (4) em (5), temos

$$2(3v_C - 6)^2 + (3 - v_C)^2 + v_C^2 = 9$$

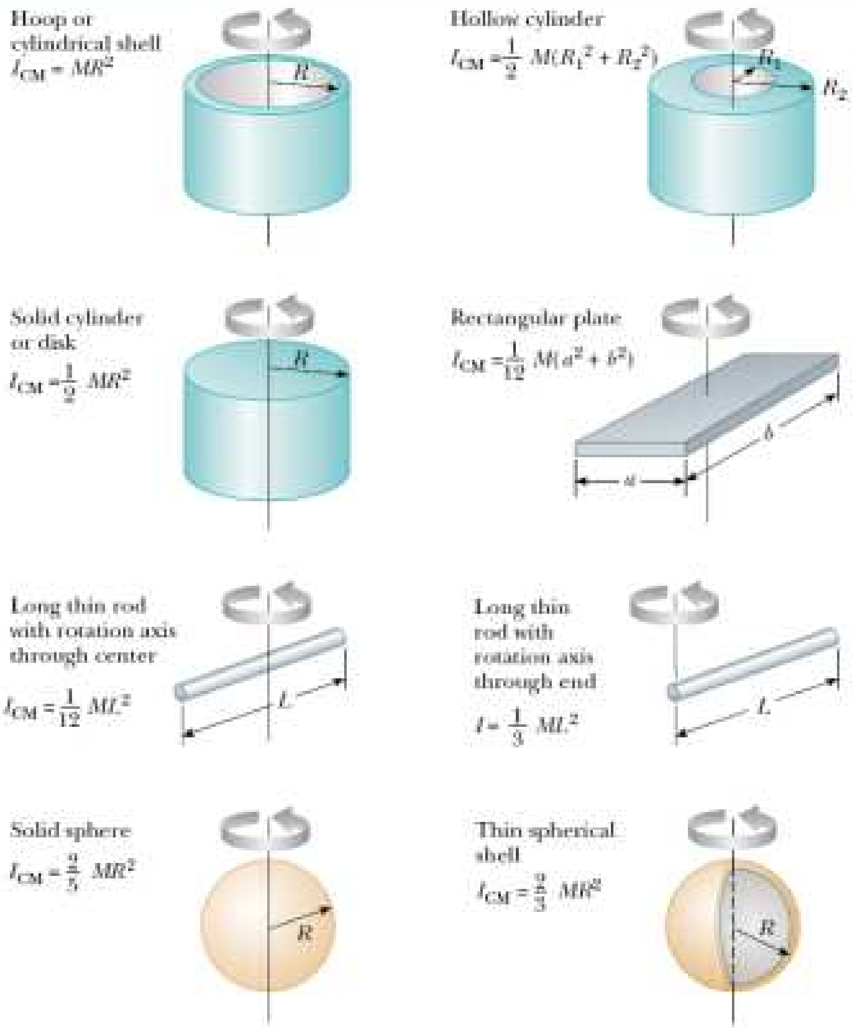
$$20v_C^2 - 78v_C + 72 = 0$$

Resolvendo para v_C, encontramos $v_C = 1{,}5$ m/s e $v_C = 2{,}4$ m/s. Como somente a segunda raiz fornece um valor positivo para v_A depois da substituição na Eq. (4), concluímos que $v_C = 2{,}4$ m/s e

$$v_A = (v_B)_y = 3(2{,}4) - 6 = 1{,}2 \text{ m/s} \qquad (v_B)_x = 3 - 2{,}4 = 0{,}6 \text{ m/s}$$

$$\mathbf{v}_A = \mathbf{1{,}2\ m/s} \uparrow \quad \mathbf{v}_B = \mathbf{1{,}34\ m/s} \measuredangle\ \mathbf{63{,}4°} \quad \mathbf{v}_C = \mathbf{2{,}4\ m/s} \rightarrow \quad \blacktriangleleft$$

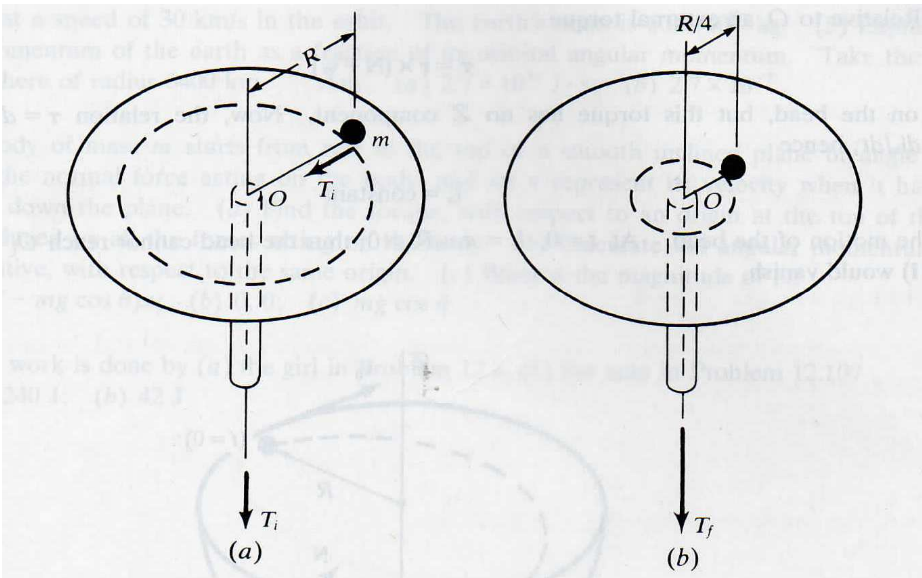
Alguns momentos de inércia



Um pequeno corpo de massa **m** está esticado por uma corda leve e rígida e se move numa trajetória circular de raio **R** num plano horizontal sem atrito, ver figura abaixo. A velocidade angular do corpo em relação a **O** inicialmente é igual a $\mathbf{W_0}$, e a força na corda é $\mathbf{T_i}$. A corda é puxada até que a distância de **O** até o corpo seja **R/4**.

(a)Determine a razão da velocidade angular final em relação a velocidade angular inicial;

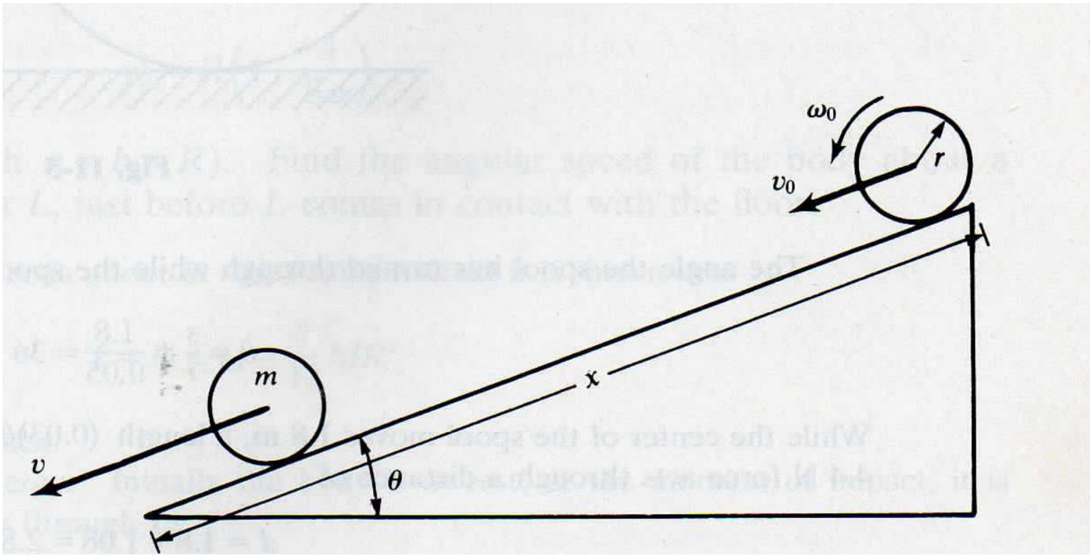
(b)Determine a razão entre a força final de tração na corda em relação a força inicial.



Um cilindro maciço homogêneo rola em uma rampa plana inclinada , a partir do topo, sem ocorrência de escorregamento. Começa com uma velocidade angular $\mathbf{W_0}$ e velocidade linear $\mathbf{v_0}$ conforme mostra a figura abaixo.

(a)Determine a velocidade linear **v** do cilindro após rolar uma distância **x**;

(b)Qual a força de que atua no cilindro.

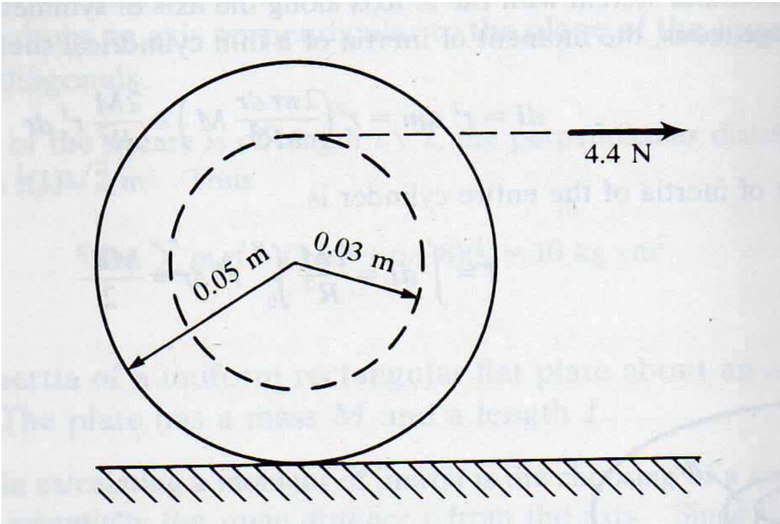


Resolva esse problema considerando o corpo como sendo uma esfera maciça de raio r.

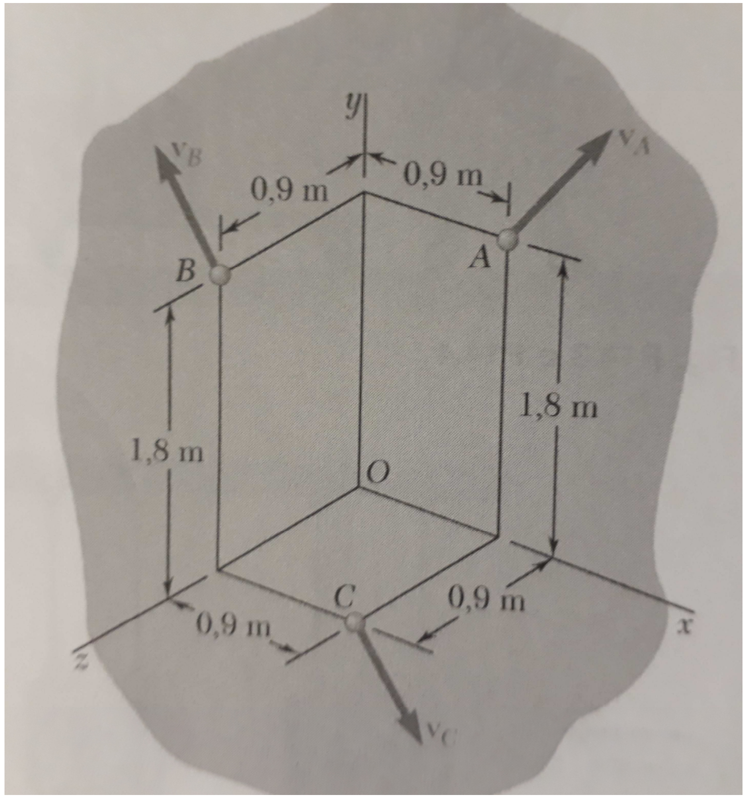
(a)R. $F_{at} = (2/7)\ mg\mathrm{sen}\theta$

(b)R. $v^2 = v_0^2 + (10/7)gx\mathrm{sen}\theta$

Um fio leve está sendo desenrolado de um carretel por uma força constante de 4,4 N. O carretel pesa 1,1N e seu raio de giração com relação ao seu eixo é 0,01 m. O atrito entre o carretel e o solo garante que não há escorregamento. Ache a velocidade do centro após percorrer 1,8 m.



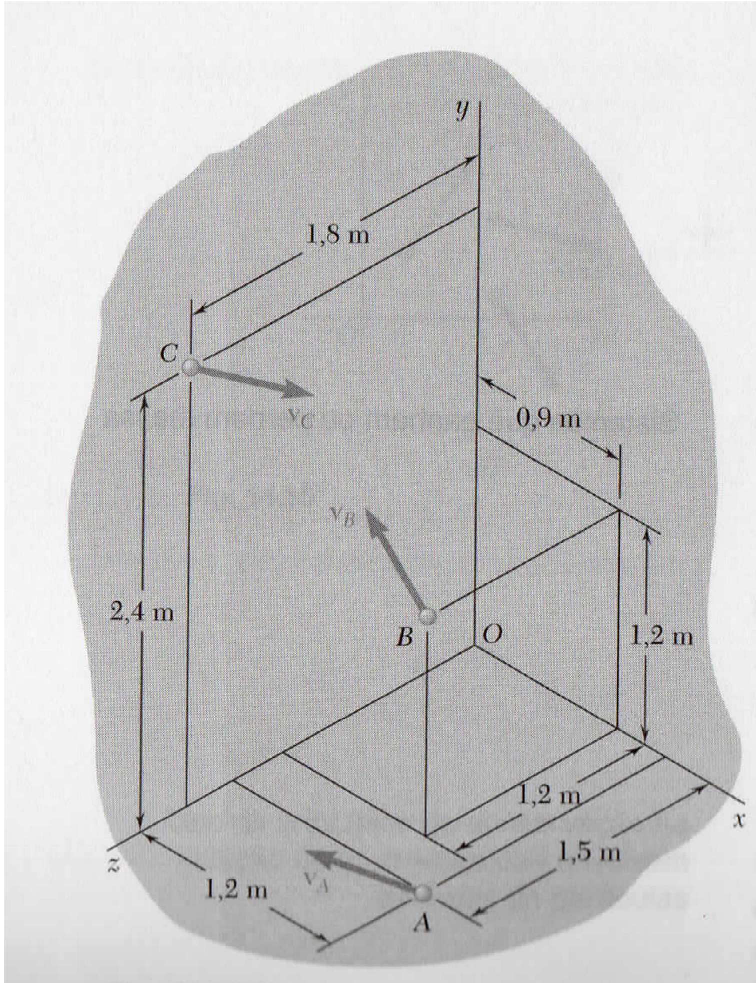
Um sistema consiste de três partículas **A**, **B** e C. Sabemos que $m_A = 2$ kg , $m_B = 2$ kg e $m_C = 14$ kg e que as velocidades das partículas expressas em m/s são, respectivamente, $v_A = 14i + 21j$, $v_B = - 14i + 21j$ e $v_C = - 3j – 2k$. Determine a quantidade de movimento angular H_O do sistema em relação a O.



Para o sistema de partículas do exercício anterior, determine :
(a) O vetor posição **r** do centro de massa do sistema;
(b) A quantidade de movimento $m\mathbf{v}_{cm}$ **;**
(c) A quantidade de movimento angular $\mathbf{H}_{cm}$ do sistema em relação ao centro de massa e
(d) Verifique que usando as respostas desse exercício, bem como do anterior , satisfazem a equação:

$$\mathbf{H}_O = (\mathbf{r}_{cm} \times m\mathbf{v}_{cm}) + \mathbf{H}_{cm}$$

Um sistema consiste de três partículas **A**, **B** e C. Sabemos que m_A = 3 kg , m_B = 4 kg e m_C = 5 kg e que as velocidades das partículas expressas em m/s são, respectivamente, $v_A = -4i + 4j + 6k$, $v_B = - 6i + 8j + 4k$ e $v_C = 2i - 6j - 4k$. Determine a quantidade de movimento angular $\mathbf{H_O}$ do sistema em relação a O.



Para o sistema de partículas do exercício anterior, determine :
(a) O vetor posição **r** do centro de massa do sistema;
(b) A quantidade de movimento $m\mathbf{v}_{cm}$ **;**
(c) A quantidade de movimento angular $\mathbf{H}_{cm}$ do sistema em relação ao centro de massa e
(d) Verifique que usando as respostas desse exercício, bem como do anterior , satisfazem a equação:

$$\mathbf{H}_O = (\mathbf{r}_{cm} \times m\mathbf{v}_{cm}) + \mathbf{H}_{cm}$$